sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

ARTÍCULO
Científico

Análisis Fuzzy en el Desarrollo de un Esquema de Probabilidad en Estudiantes del Grado Undécimo en una Institución Educativa de Colombia

Fuzzy Analysis of Probability Framework Development in Eleventh-Grade Students at a Colombian School

Andrey Esneider Escobar Oquendo (Autor Corresponsal)
escobar.andrey@gmail.com
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Universidad Metropolitana de Educación, Ciencia y Tecnología, ciudad de Panamá, Panamá
(Estudiante de Doctorado en ciencias de la educación)

Enrique Zagalo Suárez Aguilar
zagalo.suarez@uptc.edu.co
ORCID: 0000-0002-1692-2240
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia
(Docente titular)

Aceptación: 07 de mayo de 2025
Publicación: 11 de junio de 2025

Resumen

Esta investigación analiza los niveles de la noción de probabilidad en estudiantes del grado undécimo en una institución educativa de Colombia, con una métrica fuzzy para evaluar su progreso en los niveles Intra, Inter y Trans, definidos por la teoría APOE. Se diseñó una descomposición genética del concepto de probabilidad que estructuró una secuencia de actividades didácticas, implementadas en el aula bajo el enfoque del ciclo ACE (Actividades, Clases, Ejercicios). Se desarrolló el estudio bajo un enfoque mixto, de tipo exploratorio-descriptivo, mediante un cuestionario estructurado y entrevistas como instrumentos de recolección de datos. Los resultados evidenciaron que el 72.7 % de los estudiantes alcanzó niveles Inter o Trans, mientras que un 27.3 % permaneció en el nivel Intra, mostrando limitaciones en la comprensión de eventos compuestos, espacio muestral y uso contextual de la probabilidad. Se identificaron errores frecuentes como el sesgo de equiprobabilidad y el uso mecánico de fórmulas. Las actividades diseñadas bajo la teoría APOE favorecieron el tránsito hacia estructuras cognitivas más complejas, y la métrica fuzzy permitió evaluar el aprendizaje con mayor precisión y flexibilidad. Se concluye que la integración de enfoques didácticos estructurados y sistemas de evaluación alternativos fortalece el pensamiento probabilístico escolar.

Palabras clave: APOE, Métrica Difusa, Lógica Difusa, Probabilidad, Descomposición Genética.

Abstract

This research analyzes the levels of the probability notion in eleventh-grade students at an educational institution in Colombia, employing a fuzzy logic to evaluate their progress across the Intra, Inter, and Trans levels defined by APOE theory. A genetic decomposition of the probability concept was designed, structuring a sequence of didactic activities implemented in the classroom under the ACE Cycle (Activities, Class, Exercises) approach. The study was conducted using a mixed exploratory-descriptive approach, utilizing a structured questionnaire and interviews as data collection instruments. The results showed that 72.7% of the students reached Inter or Trans levels, while 27.3% remained at the Intra level, displaying limitations in understanding compound events, sample space, and the contextual application of probability. Common errors identified included the equiprobability bias and the mechanical use of formulas. The activities designed based on APOE theory facilitated the transition towards more complex cognitive structures, and the fuzzy metric enabled more.

Keywords: APOS, Metric Fuzzy, Fuzzy Logic, Probability, Genetic Decomposition.

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

https://revista.sciencevolution.com

Introducción

El pensamiento humano se rige por dos sistemas, uno racional, lógico, deductivo, estructurado y consciente; y otro, automático, práctico, intuitivo, emocional e inconsciente, por tanto, se considera que toda expresión de pensamiento tiene una base racional y otra intuitiva (Vergara Gómez et al., 2020). Respecto al sistema racional, el valor que aporta la información probabilística en la vida diaria ha crecido significativamente, enfatizando la necesidad de que los ciudadanos manejen estos conocimientos tanto de forma contextualizada como numérica (Fernandez Coronado & García-García, 2024). Específicamente, en el ámbito escolar, existe una gran necesidad de fomentar una alfabetización probabilística que le permita al estudiante hacer frente a distintas situaciones cotidianas, las cuales implican la interpretación o generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones (García-García et al., 2020).

En relación con la enseñanza de la probabilidad, las bases curriculares de diversos países, como Chile, promueven el uso del razonamiento matemático para abordar problemas estadísticos (Fernandez Coronado & García-García, 2024). Sin embargo, los estudiantes aún presentan dificultades, tales como, confusión entre hipótesis lógica y estadística, formulación incorrecta de hipótesis basadas en estadísticas muestrales en lugar de parámetros poblacionales, interpretación errónea del nivel de significación, así como dificultades para tomar decisiones adecuadas a partir de los datos, demostrando que su aprendizaje está limitado por enfoques pedagógicos centrados en la aplicación mecánica de fórmulas, en lugar de fomentar la comprensión crítica y contextual (Su & Marchant, 2021). Por otro lado, en Colombia, el gobierno central establece que las instituciones educativas apliquen a los estudiantes los exámenes Saber-Pro y Saber 11, con el objetivo de medir su rendimiento académico y evaluar la calidad educativa (Iguarán Jiménez et al., 2023). El Informe de Gestión acerca de la prueba Saber 11, realizado por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES, 2021), entre los años 2014 y 2023, evidencia que aunque el desempeño en el área de matemáticas ha mejorado ligeramente en los últimos años, el desarrollo de competencias asociadas al razonamiento probabilístico en los estudiantes continúa condicionado por factores estructurales y de desigualdad, que afectan de manera significativa el acceso a una educación matemática sólida y equitativa.

Una enseñanza práctica y efectiva debe incluir la noción de sentido probabilístico, el cual desde una perspectiva educativa se construye a partir del desarrollo de conocimientos y competencias vinculadas a la alfabetización, razonamiento y pensamiento probabilístico, lo que capacita al estudiante para enfrentarse a problemas de mayor dificultad en su vida académica y laboral. No obstante, aún se manifiestan dificultades persistentes en la comprensión y aplicación de la probabilidad, subrayando la importancia del conocimiento de conceptos esenciales como aleatoriedad y variabilidad, a fin de favorecer una comprensión profunda de conceptos probabilísticos en relación con su aplicación práctica (Fernandez Coronado & García-García, 2024). Sumado a ello, la transformación digital que vivimos exige el uso de herramientas virtuales en la enseñanza, como el uso de las TIC con sus elementos, los cuales son: cognomática, informática, telecomunicaciones, internet, redes, nanotecnología, microelectrónica, inteligencia artificial, entre otros (Castellanos Contrera et al., 2020).

En ese contexto, se vuelve relevante el uso de sistemas de información inteligente en pro de mejorar los procesos educativos. Entre estos sistemas está la lógica difusa o fuzzy logic, como una alternativa a los métodos tradicionales empleados en la educación, la cual permite abordar aspectos como la ambigüedad, la imprecisión o la falta de información completa, frecuentes en la enseñanza. Su aplicación puede facilitar evaluaciones más justas y flexibles del desempeño docente o estudiantil, puesto que requiere entradas numéricas exactas para emitir juicios válidos, lo que resulta útil cuando las condiciones para la toma de decisiones educativas son inciertas o difíciles de cuantificar con precisión (Popescu & Pistol, 2021). Asimismo, la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto y Esquema), fundamentada en la epistemología genética de Jean Piaget (Piaget, 1970) y su aplicación al pensamiento matemático avanzado, propone un enfoque que ayuda al estudiante a internalizar conceptos matemáticos. Esta teoría indica que la comprensión matemática se desarrolla en cuatro etapas: en primer lugar está la acción, etapa en la que el estudiante realiza operaciones paso a paso, con instrucciones externas explícitas; en segundo lugar, el proceso, dónde el estudiante interioriza las acciones, desarrolla la capacidad de imaginar y de realizar las operaciones mentalmente, sin necesidad de ejecutar cada paso; en tercer lugar, el objeto, etapa en la que se realiza una construcción mental que encapsula una idea o concepto matemático en su totalidad; y en cuarto lugar, el esquema, que representa el nivel más alto de organización cognitiva, integrando elementos más básicos. Además, esta teoría utiliza la descomposición genética para diseñar intervenciones educativas apropiadas, adaptándose a las circunstancias propias de cada secuencia de aprendizaje, permitiendo

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240
Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579

https://revista.sciencevolution.com

así, la creación de materiales didácticos que promuevan la construcción de conocimientos matemáticos (Escobar Pérez et al., 2024).

Con base en estos fundamentos, esta investigación adopta un enfoque mixto, que combina una perspectiva cualitativa, orientada a la descripción e interpretación de los procesos de comprensión en el ámbito educativo (Muñoz Cuchca & Solís Trujillo, 2021), y una estrategia cuantitativa, que emplea la noción de espacio métrico difuso, propuesta por George y Veeramani (1994), para estimar los niveles de desarrollo alcanzados por los estudiantes respecto al concepto de probabilidad.

En concordancia con lo anterior, el objetivo de esta investigación es analizar los niveles de comprensión de la noción de probabilidad en estudiantes de grado undécimo de una Institución Educativa del Municipio de Itagüí, Colombia, a partir de su participación en una secuencia de actividades estructuradas bajo los principios de la teoría APOE y evaluadas mediante criterios derivados de la lógica difusa. Este análisis pretende que los estudiantes avancen y superen algunas de las dificultades relacionadas con el desarrollo del concepto de probabilidad mediante la validación de un modelo de aprendizaje que promueve su comprensión y generar insumos que potencien la apropiación del objeto probabilidad, fortaleciendo su comprensión y aportando herramientas para el desarrollo de una ciudadanía más crítica y reflexiva.

Método

Enfoque Metodológico

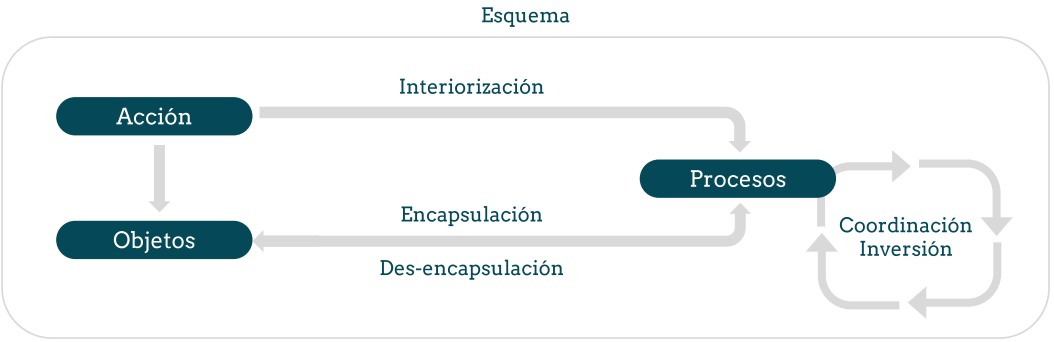
Esta investigación adoptó un enfoque mixto. Desde una perspectiva cualitativa, se orientó a la comprensión de los procesos de construcción de conocimiento en torno a la noción de probabilidad, mediante la descripción e interpretación de la realidad educativa (Muñoz Cuchca & Solís Trujillo, 2021). Asimismo, desde el enfoque cuantitativo, se incorporó la noción de espacio métrico difuso propuesta por George y Veeramani (1994), para determinar los niveles de desarrollo alcanzados por los estudiantes en la comprensión del concepto estudiado, utilizando una métrica fuzzy basada en lógica difusa.

Diseño de Estudio

El diseño es de tipo exploratorio-descriptivo. Se estructuró una secuencia de actividades con base en la teoría APOE y en la Descomposición Genética (DG) del objeto matemático *probabilidad*, permitiendo observar el tránsito de los estudiantes por los niveles de comprensión establecidos en dicha teoría: Acción, Proceso, Objeto y Esquema (Escobar Pérez et al., 2024).

En el Gráfico 1 se presenta desde la perspectiva APOE el proceso que debe seguir una construcción mental.

Gráfico 1
Dinámica de las construcciones mentales



Nota. Construcciones mentales que enmarca la teoría APOE. Extraída de Asiala et al. (1996).

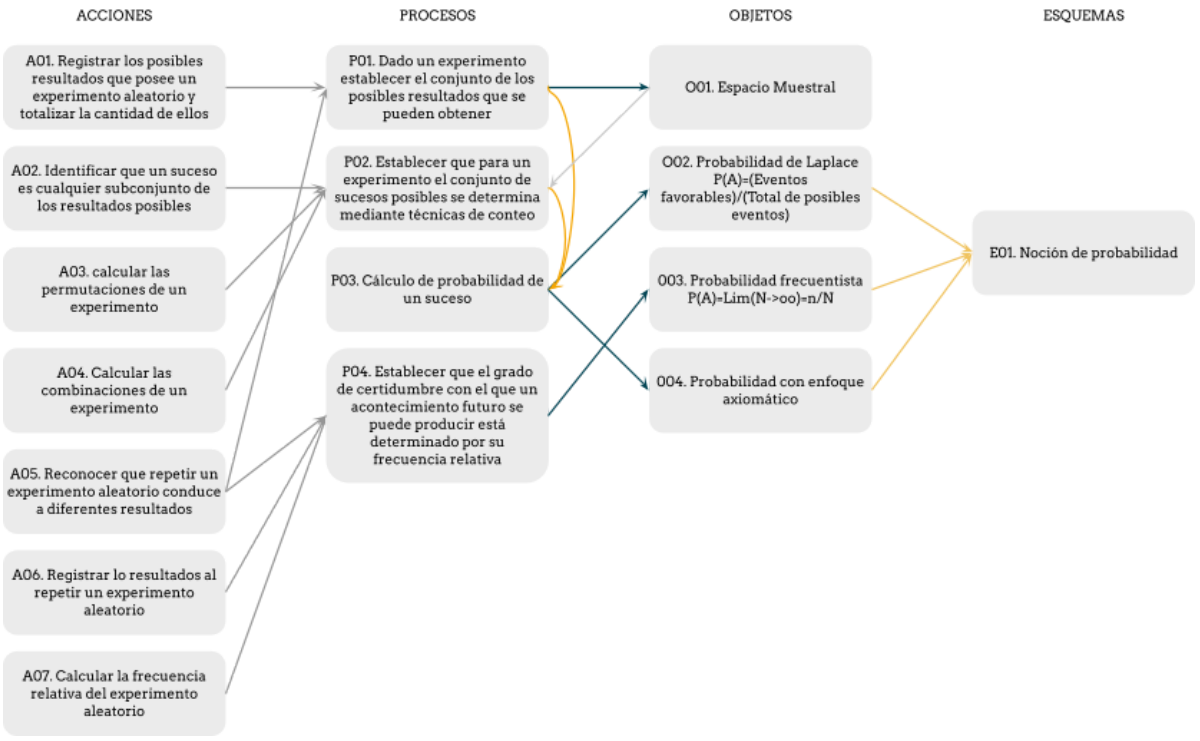
sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

https://revista.sciencevolution.com

En el Gráfico 2 se presenta la DG hipotética como modelo para construir el concepto de noción de probabilidad en estudiantes del grado undécimo en condiciones de educación rural.

Gráfico 2
Estructuras y mecanismos mentales propuestos en la DG preliminar.



En concordancia con este marco teórico, se implementó un ciclo de actividades ACE (Actividades, Clases y Ejercicios), diseñado para promover el desarrollo progresivo de estructuras mentales vinculadas al concepto en estudio.

Tipo de Estudio

El estudio es de carácter explicativo, dado que busca analizar y fundamentar los niveles de desarrollo cognitivo en los estudiantes con relación al concepto de probabilidad, considerando las estructuras mentales involucradas en su aprendizaje y aplicando modelos difusos para cuantificar dicho progreso.

Población y Muestra

La población está constituida por estudiantes de grado undécimo de una institución de educación básica y media del municipio de Itagüí, Colombia. La muestra fue de tipo intencional-estratificada, conformada por 33 estudiantes.

Técnicas de Recolección de Datos

Se utilizó un cuestionario estructurado, diseñado para evidenciar los niveles de desarrollo cognitivo según la DG del concepto de probabilidad; y entrevistas centradas en las justificaciones, formuladas a partir de las respuestas obtenidas en el cuestionario, con el fin de profundizar en los argumentos y razonamientos empleados por los estudiantes.

Instrumentos

El instrumento principal fue un cuestionario que, en su versión final, constó de seis tareas diseñadas con base en los estándares curriculares nacionales y literatura científica especializada. Las tareas se sometieron a una prueba piloto y su validez se determinó con el método Juicio de Expertos. Cada tarea fue asociada a propósitos específicos vinculados a los elementos de la DG, lo que permitió su análisis conforme a los niveles de desarrollo definidos en la teoría APOE.

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

https://revista.sciencevolution.com

Tabla 1
Cuestionario

N°	Tarea	Propósito
1	Un niño se encuentra jugando a lanzar un dado común. a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el número 5 en un lanzamiento? ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor a tres? b. Si lanza dos dados comunes ¿Cuál es la probabilidad que la suma sea 3? ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos no sea 7?	Realizar lo descrito en A01, A02, A03, de la DG: • A01, registrar los posibles resultados que posee un experimento aleatorio y totalizar la cantidad de ellos sin realizar el experimento. • A02, identificar que un suceso es cualquier subconjunto de los resultados posibles; A03, emplear técnicas de conteo.
2	Estados Unidos para el año 2020 tenía una población de 280 millones de habitantes, año en el cual 371 personas murieron a causa de la caída de un rayo. Durante el mismo año se jugó (una única vez) una lotería con seis cifras, cada cifra tiene la posibilidad de 0 a 9. Es decir, 10 dígitos por cifra. Bajo estas circunstancias ¿Qué es más probable, morir por un rayo o ganarse la lotería comprando un boleto?	Realizar lo descrito en A05, A06, P01, P02, de la DG: • A05, reconocer que repetir un experimento aleatorio conduce a diferentes resultados. • A06, registrar los resultados al repetir un experimento aleatorio. • P01, dado un experimento establecer el conjunto de los posibles resultados que se pueden obtener. • P02, establecer que para un experimento el conjunto de sucesos posibles se determina mediante técnicas de conteo.
3	La probabilidad del Inter de Milán para comprar un delantero es de 0.25; la probabilidad que el delantero se adapte al juego del equipo es de 0.70; y la probabilidad que sea comprado el delantero y se adapte al juego del equipo es de 0.12. Calcular la probabilidad de: a. El delantero no se adapte al juego del equipo. b. El equipo compre el delantero o el delantero se adapte al juego del equipo.	Realizar lo descrito en P03, O04 de la DG: • P03, cálculo de probabilidad de un suceso. • O04, Probabilidad con enfoque axiomático.
4	Pablo tiene 5 bolas blancas y 7 negras en una caja. Miguel tiene otra caja con 3 bolas blancas y 5 negras. ¿Cuántas bolas, negras y/o blancas, pasarías de una caja a otra para que ambos niños tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra? ¿Por qué?	Realizar lo descrito en O01 de la DG: • O01, espacio muestral.
5	Miguel y Luis juegan a un juego con dos dados ordinarios (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6. Tiran los dos dados y multiplican los números obtenidos. Miguel gana un peso si el producto es par. Si el producto es impar Luis gana un peso. a. ¿Te parece que el juego es equitativo? ¿Por qué? b. Si Miguel gana 1 peso cuando el producto de los números de los dos dados es par, ¿Cuántos pesos debería ganar Luis cuando el producto es impar para que el juego sea equitativo? ¿Por qué?	Realizar lo descrito en O02 de la DG: • O02, Probabilidad de Laplace P(A) = Eventos favorables/Total de posibles eventos.
6	Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba y 32 caen con la punta hacia abajo. Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas, cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo. Los resultados se reportan en la siguiente tabla. Daniel: Punta arriba: 67 / Punta abajo: 33 Martín: Punta arriba: 70 / Punta abajo: 30 Diana: Punta arriba: 65 / Punta abajo: 35 María: Punta arriba: 68 / Punta abajo: 32 ¿Qué se puede concluir del experimento? Si tú tienes que lanzar las 100 chinchetas ¿Cuál sería un posible resultado?	Realizar lo descrito en O01, O03 de la DG: • O01, espacio muestral. O03 probabilidad frecuentista P(A)=lim(N→∞)=n/N.

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240
Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579

https://revista.sciencevolution.com

Análisis de Datos

Cada respuesta al cuestionario, complementada por la entrevista, fue evaluada asignándole un grado de desarrollo según una escala de cinco niveles: 0; 0.25; 0.50; 0.75 y 1. A todos los estudiantes les fue asignada una 14-tupla en la que cada valor indicó el grado de desarrollo de los elementos considerados en la DG, reflejando su nivel de comprensión. Para interpretar estos resultados, se aplicó una métrica *fuzzy*, propuesta por George y Veeramani (1994) en la que la métrica *fuzzy* estándar inducida por la métrica Euclídea sobre el conjunto X viene dada por:

$$F_d = (x,\ y,\ t) = \frac{t}{t+d(x,y)}$$

Donde F_d es conocido como la distancia *fuzzy* que se interpreta como la distancia d(x,y) relacionada con la métrica clásica euclidiana que mide el grado de cercanía en términos cualitativos entre dos estudiantes. Si d(x, y) = 0 entonces se tiene que $F_d = 1$ lo que se interpreta como "cercanía extrema", mientras que, a medida que d(x, y) se hace grande, F_d se va acercando a cero, es decir se tiende a la "extrema lejanía", valor que se alcanza en el límite cuando d(x, y) tiende a
$+\infty$ sea cual sea el valor de t>0.

La aplicación de la métrica *fuzzy* permitió calcular la pertenencia de cada estudiante a un conjunto difuso asociado a los tres subesquemas del objeto *probabilidad*: Laplace, frecuentista y axiomático.

El valor del parámetro contextual t se estableció en t = 0.667, lo que sirvió como base para definir umbrales correspondientes a tres niveles de desarrollo:

- Intra (Fd < 0.332)
- Inter (0.332 ≤ Fd < 0.505)
- Trans (Fd ≥ 0.505)

Esta aproximación hizo posible representar de forma cualitativa y cuantitativa el progreso conceptual de los estudiantes, integrando el análisis difuso con los principios de la teoría APOE para una caracterización más precisa del aprendizaje.

Resultados

Aplicación de la Métrica Fuzzy

En la Tabla 1 se muestran los resultados de la aplicación de la métrica *fuzzy* y la cuantificación de la función de pertenencia para cada uno de los estudiantes con el valor del parámetro contextual t=0.667; x0 ∈ X que para esta investigación sería la 14-tupla.

Tabla 1
Caracterización de los niveles de desarrollo Intra-Inter-Trans según la formulación de indicadores

	Esquema 1: Probabilidad de Laplace							Esquema 2: probabilidad frecuentista					Esquema 3: probabilidad axiomática				
E	T1a	T1b	T2b	T4	T5a	T5b	PE1	P=PE1	T2a	T6a	T6b	PE2	P'=PE2	T1b	T3a	T3b	$\mu(x)$)
E7	1	0.25	0	0.75	0.25	0.25	0.246	0.25	0	0.5	0	0.284	0.28	0.25	0.25	0.25	0.310
E9	0.25	0.25	0	0.25	0.25	0.25	0.220	0.22	0	0.25	0.25	0.287	0.29	0.25	0.25	0.25	0.310
E13	0.25	0.25	0.75	1	0.25	0.25	0.261	0.26	0.75	0	0.25	0.312	0.31	0.25	0.25	0.25	0.312
E4	0.5	0.25	0.25	0.75	0.5	0.25	0.264	0.26	0.25	0.5	0.5	0.345	0.34	0.25	0.25	0.25	0.314
E25	1	1	1	0.75	0.5	0.25	0.373	0.37	0.75	0	0	0.298	0.30	1	0	0.25	0.317
E3	0.75	0.5	0.75	0.25	0.5	0.25	0.287	0.29	0.75	0	0	0.294	0.29	0.5	0.25	0.25	0.328
E10	1	1	1	1	1	1	1.000	1.00	0.75	0.5	0.5	0.471	0.47	1	0	0.25	0.329
E19	1	0.5	0	0.5	0.25	0.25	0.250	0.25	0.75	0.5	0	0.327	0.33	0.5	0.25	0.25	0.330
E5	0.75	0.5	0.75	0.75	0.25	0.25	0.299	0.30	0.75	0.25	0.25	0.340	0.34	0.5	0.25	0.25	0.331
	1	*0.5*	*0.75*	*0.5*	*0.5*	*0.25*	*0.313*	*0.31*	*0.5*	*0.5*	*0.25*	*0.350*	*0.35*	*0.5*	*0.25*	*0.25*	*0.332*
E2	1	0.75	0.75	1	1	1	0.653	0.65	0.75	1	1	0.609	0.61	0.75	0.25	0	0.333

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240
Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579

https://revista.sciencevolution.com

E27	**1**	**0.5**	**1**	**0.75**	**0.5**	**0.5**	**0.400**	**0.40**	**0.75**	**0.75**	**0.75**	**0.474**	**0.47**	**0.5**	**0.25**	**0.25**	**0.342**
E29	0.75	0.75	1	1	0.25	0.25	0.324	0.32	0.75	0.75	0.75	0.454	0.45	0.75	0.25	0.25	0.354
E28	1	0.75	0.75	1	0.25	0	0.267	0.27	0.75	0	0	0.293	0.29	0.75	0.75	0.25	0.380
E20	1	0.75	0.75	0.75	1	1	0.606	0.61	0.75	1	1	0.588	0.59	0.75	0.5	0.25	0.395
E22	1	0.75	1	0,5	1	1	0.544	0.54	0.75	0.75	0.75	0.515	0.51	0.75	0.5	0.5	0.427
E16	1	0.75	1	0.75	1	1	0.653	0.65	0.75	0.75	0.75	0.546	0.55	0.75	0.5	0.5	0.432
E24	0.75	1	0.25	0.75	0.5	0.25	0.303	0.30	0.25	0.5	0.5	0.349	0.35	1	0.5	0.75	0.437
E31	0.5	0.5	0.5	0.75	0.75	0.5	0.360	0.36	0.5	0.25	0.25	0.333	0.33	0.5	1	1	0.444
E30	1	1	0.25	0.5	0.5	0.25	0.295	0.29	0.75	0.5	0.5	0.393	0.39	1	0.5	0.75	0.447
E18	1	0.75	0.75	1	1	1	0.653	0.65	0.75	0.75	0.75	0.546	0.55	0.75	0.75	0.5	0.467
E11	1	1	1	0.75	0.5	0.5	0.452	0.45	0.75	0.75	0.75	0.488	0.49	1	1	0.5	0.482
E12	1	1	1	0.75	0.25	0.25	0.330	0.33	0.75	0	0	0.296	0.30	1	1	1	0.486
E8	0.5	1	0.25	0.75	1	0.25	0.308	0.31	0.75	0.5	0.5	0.395	0.40	1	0.75	0.75	0.488
E15	1	0.75	0.25	0.75	0.75	0.25	0.318	0.32	0.75	0.75	0.75	0.452	0.45	0.75	0.75	0.75	0.488
	1	*1*	*1*	*0.75*	*0.75*	*0.5*	*0.525*	*0.52*	*0.75*	*0.75*	*0.75*	*0.509*	*0.51*	*0.75*	*0.75*	*0.75*	*0.505*
E32	1	0.75	1	1	0.25	0.25	0.330	0.33	0.75	0.5	0.5	0.399	0.40	0.75	1	1	0.506
E17	1	1	1	0.5	0.5	0.25	0.344	0.34	0.75	0.75	0.75	0.459	0.46	1	0.75	0.75	0.508
E26	1	1	1	1	0.75	1	0.727	0.73	0.75	1	0.75	0.599	0.60	1	1	0.5	0.510
E21	1	1	1	1	1	1	1.000	1.00	0.75	0.75	0.75	0.606	0.61	1	1	0.5	0.512
E33	1	1	0.5	1	0.5	0.25	0.344	0.34	0.75	1	1	0.487	0.49	1	1	0.75	0.539
E14	0.75	0.75	1	0.75	0.75	0.75	0.542	0.54	0.75	0.75	0.75	0.514	0.51	0.75	1	1	0.550
E6	1	1	0.5	1	1	1	0.571	0.57	0.75	0.75	0.75	0.523	0.52	1	0.75	1	0.553
E23	1	1	1	0.25	1	1	0.471	0.47	0.75	0.75	0.75	0.494	0.49	1	1	1	0.568
E1	1	1	0.75	1	1	0.75	0.681	0.68	0.75	0.75	0.75	0.553	0.55	1	1	1	0.599

En la Tabla 2 se presenta el resumen de los desempeños de los estudiantes en los niveles de desarrollo Intra-Inter-Trans teniendo en cuenta los valores frontera establecidos anteriormente.

Tabla 2
Porcentaje de estudiantes en los niveles de desarrollo Intra-Inter-Trans

Nivel de desarrollo	Grado de pertenencia (F_d)	Cantidad de estudiantes	Porcentaje en el nivel de desarrollo (%)
Intra	$F_d < 0.332$	9	27.3 %
Inter	$0.332 \leq F_d < 0.505$	15	45.4 %
Trans	$0.505 \leq F_d$	9	27.3 %

Nivel Intra de Desarrollo del Esquema Noción de Probabilidad

En este nivel se han ubicado a 9 estudiantes que tienen una métrica *fuzzy* inferior a 0.332 correspondientes al 27.3 % de los estudiantes objeto de la investigación. Con base en la muestra estratificada se pueden establecer características comunes que se evidenciaron por parte de este grupo de estudiantes, las cuales se detallan a continuación

Esquema 1: Probabilidad de Laplace

Este grupo de estudiantes reconoce a nivel de acción si un experimento puede analizarse desde un suceso (A02) y admite que estos deben pertenecer al experimento. Además, son capaces de establecer el espacio muestral a nivel de proceso (P01) de un experimento simple si se apoyan de representaciones gráficas o listados. Sin embargo, no emplean técnicas de conteo cuando la

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

https://revista.sciencevolution.com

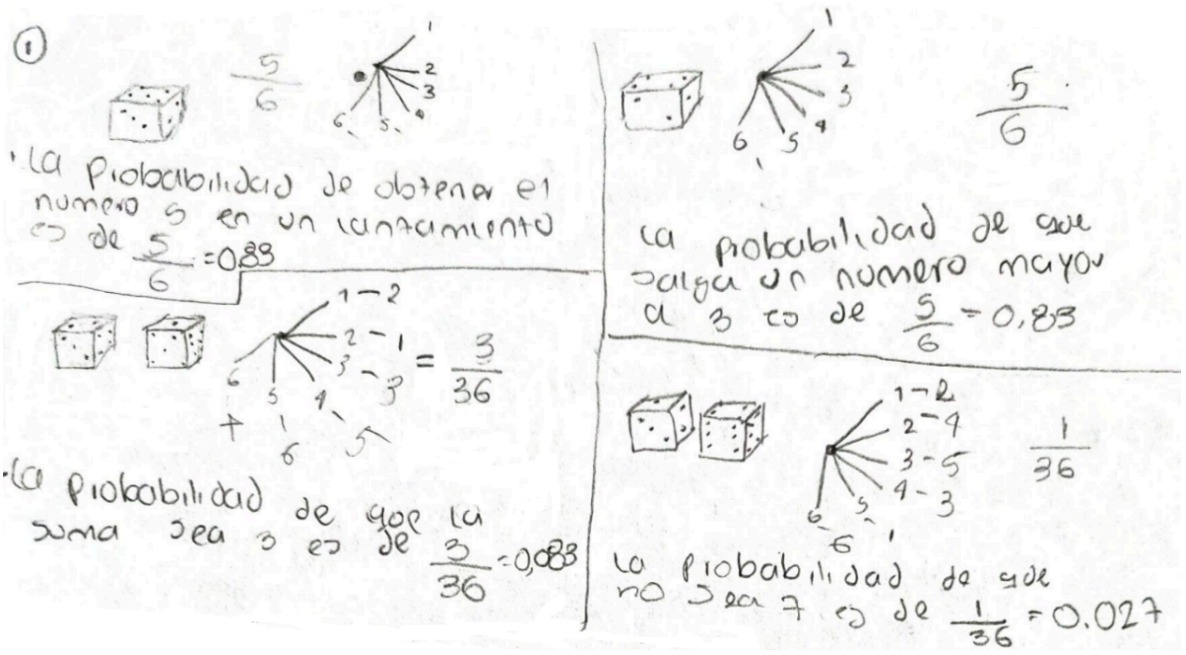
complejidad del experimento se incrementa, limitando de esta manera su capacidad para establecer el espacio muestral. Mientras que, los estudiantes que no han desarrollado el concepto de evento compuesto, no pueden construir espacios muestrales que requieren el uso de técnicas de conteo (P02) y tampoco logran cuantificar probabilidades en situaciones donde dichas técnicas son necesarias (P03, O02). Por ello, cuando intentan abordar las situaciones propuestas exponen argumentos superficiales que carecen de coherencia y cohesión (E01).

Esquema 2: Probabilidad frecuentista.
06, A07, P04), ellos identifican cuando un experimento puede ser no equiprobable y realizan conclusiones literales a partir de la información dada (E01). No obstante, no muestran indicios de la comprensión del concepto de probabilidad frecuentista (O03), dado que sus análisis no poseen alto grado de profundidad y sus argumentos no respaldan sus conclusiones (E01).

Esquema 3: Probabilidad axiomática.
Este grupo de estudiantes no muestra indicios de desarrollo del esquema. Las evidencias llegan a nivel de acción respecto al reconocimiento del suceso del experimento aleatorio (P03). En términos generales no relacionan estos axiomas con su implementación en situaciones de probabilidad (O03), evidencian dificultades de aplicación debido a la falta de comprensión de la teoría de conjuntos y presentan dificultades al convertir la representación gráfica a una representación numérica (P03).

Relación de Evidencias de las Características que Mostraron los Estudiantes en el Nivel de Desarrollo Intra

Figura 1
Solución de la Tarea 1 por el estudiante E9



En la Figura 1, el estudiante E9 hace uso de la representación gráfica para establecer el espacio muestral. Asimismo, expresa adecuadamente el espacio muestral para el ítem 1a, pero cuantifica de manera inadecuada los eventos favorables para el suceso solicitado. Esto demuestra un error conceptual relacionado con la distinción entre suceso y eventos favorables, lo que, a su vez, afecta los cálculos mecánicos que emplea para determinar la probabilidad.

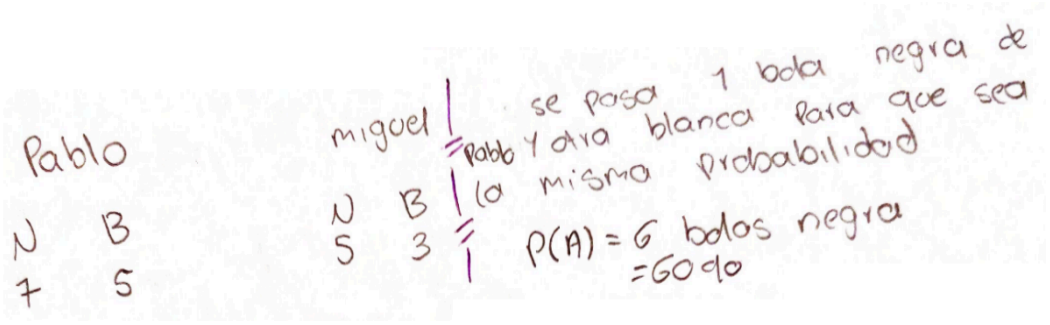
Por otro lado, en la propuesta de solución para el ítem 1b se exhiben diversos errores, reflejando la complejidad para establecer el espacio muestral cuando se requieren técnicas de conteo. A pesar de que el estudiante se apoya en la representación gráfica, no es suficiente para resolver la tarea por falta de orden y estructura en el listado. De esta manera se observó que el estudiante de este nivel presenta dificultades para establecer el espacio muestral y su determinación se limita a sucesos simples.

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

https://revista.sciencevolution.com

Figura 2
Solución de la Tarea 4 por el estudiante E5



En la Figura 2, se observa que el estudiante E5 interpreta incorrectamente el desafío planteado en la tarea 4, al transformar la situación original en otra donde todas los elementos (bolas) se colocan en un solo contenedor. A partir de ello, concluye que los niños tendrían mayor probabilidad de extraer una bola negra. Inicialmente, Miguel tenía una probabilidad del 62.5 % de extraer una bola negra, sin embargo, el estudiante concluye de manera incorrecta, que esa probabilidad disminuye al 60 %. Esto evidencia un error de razonamiento, puesto que el estudiante no valida numéricamente su hipótesis ni reconoce que su propuesta empeora la situación en lugar de mejorarla.

Por otra parte, el alumno evidencia varios errores conceptuales para el establecimiento de la probabilidad bajo el enfoque de Laplace, presentando problemas en el concepto de suceso, eventos favorables y el espacio muestral.

Nivel Inter de Desarrollo del Esquema Noción de Probabilidad

En este nivel se han ubicado 15 estudiantes que tienen una métrica *fuzzy* igual o superior a 0.332 e inferior a 0.505, correspondiente al 45.4 % de los estudiantes objeto de la investigación. Entre las características comunes que se evidenciaron por parte de este grupo tenemos:

Esquema 1: Probabilidad de Laplace

Los estudiantes son capaces de registrar, totalizar y reconocer los sucesos de un experimento (A01, A02), aplicar las técnicas de conteo en las situaciones que lo requieran (A03, A04, P02). Además, son capaces de establecer el espacio muestral de un experimento dado (P01, O01) apoyandose en representaciones gráficas, listados o técnicas de conteo, realizan operaciones en torno a la cuantificación de probabilidades (P03) y muestran capacidades para relacionar conceptos empleando mejores argumentos que les permiten abordar las situaciones con mayor eficacia (O02). Sin embargo, presentan algunos errores aritméticos, no hay una apropiación completa en el uso de la terminología propia de probabilidad, el uso de argumentos que sustenten sus acciones o conclusiones no se evidencian en todos los desarrollos (P02, E01).

Esquema 2: Probabilidad Frecuentista

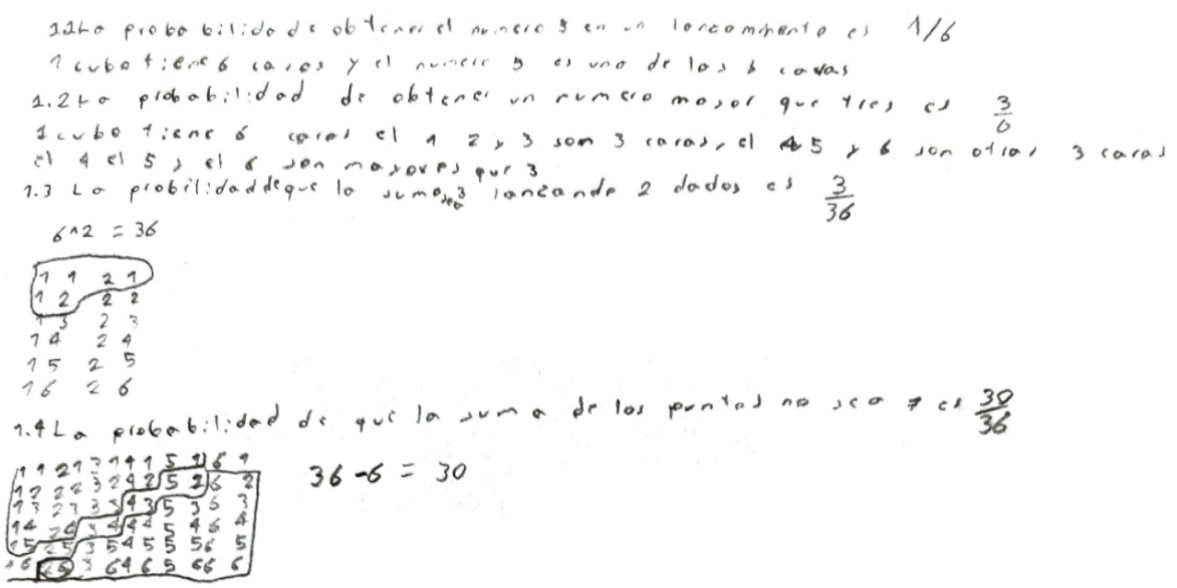
Este grupo de estudiantes ejecuta operaciones para el cálculo de la probabilidad (A05, A06, A07, P04), identifica que un experimento puede ser no equiprobable, realiza conclusiones con base a la información dada (E01). No obstante, la triangulación de la información permite reconocer que la comprensión del concepto de probabilidad frecuentista es bajo (O03), sus análisis poseen criterios y principios básicos con una profundidad incipiente (E01).

Esquema 3: Probabilidad Axiomática

Los estudiantes se apoyan en la representación gráfica de los conjuntos, para distribuir las probabilidades dadas (P03), muestran relación del concepto espacio muestral con el cálculo de la probabilidad (O01), relacionan estos axiomas con su aplicación en situaciones de probabilidad (O03), pero, debido a los bajos niveles de comprensión de la teoría de conjuntos, se evidencian dificultades de aplicación de este enfoque probabilístico y presentan ciertos errores al convertir la representación gráfica a una representación numérica (P03).

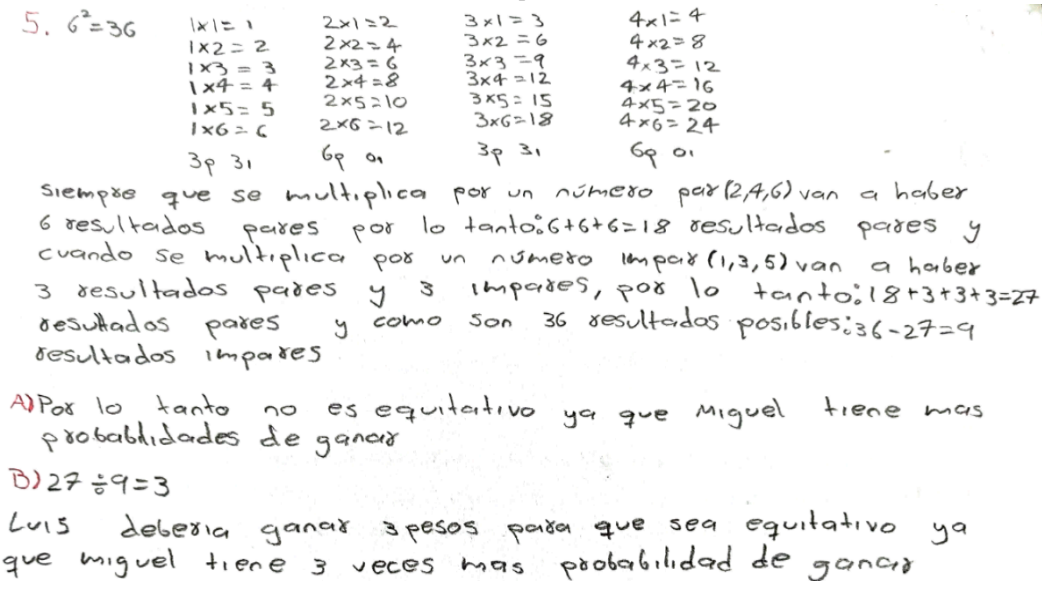
sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Figura 3
Solución de la Tarea 1 por el estudiante E22



En la Figura 3 se observa que el estudiante E22 usa el listado como técnica de conteo, lo que le permite establecer todos los posibles resultados que se tienen al lanzar dos dados, también le ayuda a concluir que el espacio muestral para este experimento está conformado por 36 eventos. A partir de estos puede seleccionar y cuantificar la cantidad de eventos favorables para las situaciones que se plantean en la Tarea 1. El desarrollo de este estudiante evidencia el uso de técnicas de conteo para el establecimiento del espacio muestral, dando cuenta así de la relación entre conceptos. Este hecho se verifica cuando el estudiante en el ítem 1b que el renombra como 1.3 determina el espacio muestral por medio del principio multiplicativo 62 = 36. Además, en este grupo de estudiantes se pueden notar otras relaciones entre conceptos, tal como lo demuestra cuando se respalda en el axioma del complemento AC = 1 – A en el ítem 1b, para establecer la cantidad de eventos favorables al suceso pedido. Además, el estudiante E22 utiliza representaciones gráficas para argumentar la relación entre eventos. En lo referente a los cálculos de probabilidad, se refleja un correcto desarrollo de ellos, sin embargo, no hay un uso adecuado de la notación propia del concepto de probabilidad.

Figura 4
Solución de la Tarea 5 por el estudiante E18



Análisis Fuzzy en el Desarrollo de un Esquema de Probabilidad en Estudiantes del Grado Undécimo en una Institución Educativa de Colombia
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240
Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
https://revista.sciencevolution.com

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

https://revista.sciencevolution.com

En la Figura 4, el estudiante E18, en primera instancia determina el espacio muestral empleando técnicas de conteo, lo que le permite saber que este consta de 36 eventos. Al mismo tiempo, se apoya en un listado para identificar la cantidad de eventos favorables al suceso de multiplicar los resultados y que este sea par. A su vez, esto le permite reconocer que cuando se obtiene inicialmente un número par, independiente del resultado del segundo dado, su multiplicación generará un resultado par. De igual manera, el análisis del estudiante le permite concluir que cuando el primer dado es impar tendrá tres resultados pares. Por lo tanto, el estudiante concluye que los eventos favorables corresponden a 18+3+3+3=27. Al tener este resultado se apoya en axioma complemento y determina que los eventos favorables para obtener un número impar al lanzar dos dados son iguales a 36-27=9, aplicando de esta manera AC= 1–A lo que permite validar las relaciones entre algunos conceptos desarrollados.

Nivel Trans de Desarrollo del Esquema Noción de Probabilidad

En este nivel se han ubicado 9 estudiantes que tienen una métrica *fuzzy* igual o superior a 0.505, correspondiente al 27.3 % de los estudiantes objeto de la investigación. Entre las características comunes, segmentadas por esquemas, que se evidenciaron por parte de este grupo de estudiantes tenemos:

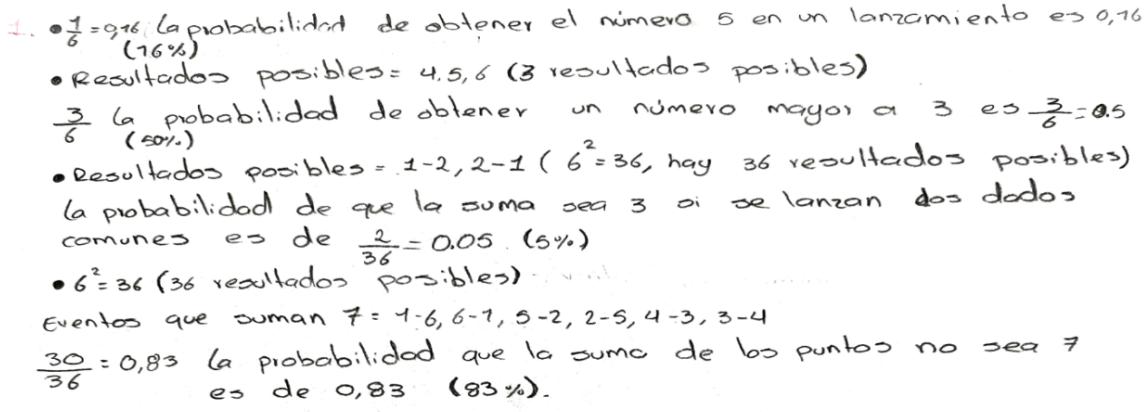
Esquema 1: Probabilidad de Laplace.
Son capaces de registrar, totalizar y reconocer los sucesos de un experimento (A01, A02); aplicar las técnicas de conteo en las situaciones que lo requieran (A03, A04, P02); establecer el espacio muestral de un experimento dado (P01, O01), apoyados en representaciones gráficas, pictóricas, listados o técnicas de conteo; realizar operaciones entorno a la cuantificación de probabilidades (P03); y relacionar conceptos empleando argumentos más estructurados que les permiten abordar las situaciones de una mejor manera (O02). En este grupo de estudiantes hay un mejor uso de la terminología propia de probabilidad, el uso de argumentos que sustenten sus acciones, conclusiones claras y mejores estructuras (P02, E01), pero aún se evidencian algunos errores aritméticos.

Esquema 2: Probabilidad Frecuentista.
Realizan operaciones para el cálculo de la probabilidad (A05, A06, A07, P04), identifican si un experimento puede ser no equiprobable, determinan conclusiones en base a la información dada y sus argumentos demuestran un mejor desarrollo del objeto de estudio (E01). Sin embargo, de manera global el nivel de desarrollo que muestran de la comprensión del concepto de probabilidad frecuentista se encuentra en un nivel de desarrollo medio (O03), sus análisis poseen criterios y principios básicos con una profundidad media (E01).

Esquema 3: Probabilidad Axiomática.
Este grupo de estudiantes se apoya en la representación gráfica de los conjuntos para distribuir las probabilidades dadas (P03), muestran relación del concepto espacio muestral (O01) con el cálculo de la probabilidad (P03) y relacionan estos axiomas con su aplicación en situaciones de probabilidad (O03). Aún así, se evidencian dificultades de aplicación de este enfoque probabilístico debido a niveles medios de comprensión de la teoría de conjuntos y presentan ciertos errores al convertir la representación gráfica a una representación numérica (P03).

Evidencias de las Características que Mostraron los Estudiantes en el Nivel de Desarrollo Trans

Figura 5
Solución de la Tarea 1 por el estudiante E33



sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240
Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579

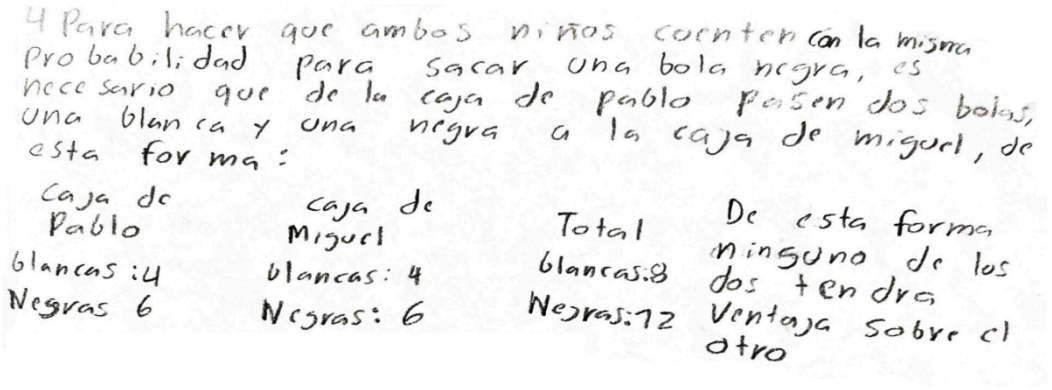
https://revista.sciencevolution.com

En la Figura 5 el estudiante E33 no se apoya en los listados para establecer el espacio muestral, sin embargo, en los procedimientos que plantea para determinar la probabilidad del ítem 1a de la Tarea 1, reconoce que el espacio muestral está constituido por seis elementos. Además, lista como 4,5,6 los eventos favorables que conforman el suceso de obtener un número mayor a 3 en el lanzamiento de un dado calculando correctamente la probabilidad para el suceso. Esto permite concluir que el estudiante no requiere estímulos externos y ha sido capaz de interiorizar, encapsular el concepto de espacio muestra para establecer relaciones entre conceptos. Esto refleja el mecanismo utilizado en el proceso para identificar subconjuntos dentro del espacio muestral y aplicar reglas de probabilidad.

Cuando el experimento se cambia a un lanzamiento de dos dados (ítem b) el estudiante expresa los eventos 1-2, 2-1 como favorables para obtener 3 en la suma del lanzamiento de dos dados. Además, cuantifica el espacio muestral por medio del uso del principio multiplicativo, concluyendo que hay 36 eventos configurando el espacio muestral. De igual manera, construye el listado de los eventos favorables para obtener 7 en la suma del lanzamiento de dos dados, sin perder el objetivo que es determinar la probabilidad de que al lanzar los dos dados la suma no sea 7. Por lo tanto, el estudiante usa el axioma del complemento de un conjunto para cuantificar la probabilidad solicitada, demostrando de esta manera relaciones entre conceptos.

En términos generales el estudiante E33 muestra conceptualización de la probabilidad como un objeto al tratarla como una entidad manipulable donde su valor se puede comparar.

Figura 6
Solución de la Tarea 4 por el estudiante E26



En la Figura 6, el estudiante E26 realiza una descripción correcta del suceso solicitado. La solución que propone es adecuada, ya que permite que Pablo y Miguel logren una configuración de bolas en sus cajas con 4 blancas y 6 negras, lo que asegura que ambos tengan la misma probabilidad de extraer una bola negra.

Discusión

Con base en los resultados obtenidos, se ha evidenciado que el 72.7 % de los estudiantes lograron desarrollar características propias de los niveles Inter y Trans, con construcciones mentales parcialmente desarrolladas. La mayor dificultad que se pudo visualizar está relacionada con la construcción del significado a priori y posteriori de probabilidad, ya que los estudiantes emplean la probabilidad de Laplace indistintamente de las características de la situación. Esta tendencia puede explicarse por la presencia del sesgo de equiprobabilidad en su razonamiento, lo que los lleva a asumir, incluso de forma implícita, que todos los sucesos elementales son igualmente posibles, y a partir de ello elaborar conjeturas poco razonables o alejadas del contexto (Huerta, 2020).

Análisis de los Resultados del Nivel Intra y sus Implicaciones Teóricas

Los resultados del nivel Intra evidencian un conjunto de dificultades recurrentes en la construcción del esquema de probabilidad. Estas limitaciones son coherentes con lo planteado por la teoría APOE, que describe este nivel como uno donde los conceptos se perciben de forma aislada, sin coordinación

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

https://revista.sciencevolution.com

de estructuras cognitivas ni abstracción (Borji et al., 2021). Los estudiantes en este nivel dependen de representaciones externas y muestran una escasa capacidad de generalización.

Arnesen y Skartsæterhagen (2025) expresan que estos resultados se deben a razonamientos inductivos de los estudiantes, que suelen enfocarse en los procedimientos de la prueba por inducción sin comprender su lógica subyacente porque carecen de entendimiento conceptual. Por su parte, Joachín-Arizmendi et al. (2024) indican que esto también es causado por dificultades en razonamientos deductivos, puesto que los alumnos cuentan con pocas estrategias de argumentación matemática. En relación con ello, Blanco-Benamburg (2021) señala que los alumnos pueden aplicar algoritmos o ejemplos particulares, pero no organizan de forma adecuada los pasos lógicos para validar generalizaciones. Además, hay evidentes sesgos relacionados con el bagaje cultural, como lo señala el estudio de Quinio y Cuarto (2023), quien explica que las percepciones intuitivas del estudiante, producto de sus creencias o nociones básicas adquiridas durante su desarrollo personal, actúan como barreras internas que dificultan la comprensión profunda y la resolución de problemas probabilísticos.

Análisis e Interpretación de los Resultados del Nivel Inter

Los estudiantes clasificados en el nivel Inter han comenzado a construir estructuras mentales más integradas, lo que se manifiesta en su capacidad para coordinar conceptos y aplicar procedimientos con menor dependencia de instrucciones externas. Este avance se alinea con la caracterización del "proceso" en la teoría APOE, en el cual los estudiantes interiorizan acciones y operan mentalmente con ellas.

Sin embargo, a pesar del progreso, aún hay limitaciones en la argumentación y comprensión profunda. Esto coincide con lo que señala Borji et al. (2021), quienes afirman que, en este nivel, los estudiantes comienzan a abstraer conceptos pero aún no alcanzan el nivel de encapsulamiento requerido para operar con objetos matemáticos.

También se observó que el nivel de comprensión del enfoque frecuentista sigue siendo bajo, lo cual sugiere que los estudiantes aún no reconocen claramente la diferencia entre probabilidad teórica y experimental. Este resultado apoya lo encontrado por Syamsuri y Santosa (2021), quienes destacan que incluso en niveles universitarios, los estudiantes presentan vacíos conceptuales si el enfoque se mantiene centrado en la mecánica del cálculo.

Análisis e Interpretación de los Resultados del Nivel Trans

Los estudiantes ubicados en el nivel Trans presentan estructuras cognitivas más avanzadas. Han logrado encapsular los conceptos y operar con ellos de manera abstracta, cumpliendo con la última etapa de la teoría APOE: el esquema. Su independencia de representaciones externas y su capacidad para coordinar diferentes esquemas probabilísticos son evidencias claras de ello.

Estos resultados muestran que, cuando se estructura una intervención didáctica adecuada —como la implementada bajo el enfoque APOE y con el apoyo de la descomposición genética— los estudiantes pueden desarrollar habilidades de análisis profundo, argumentación estructurada y transferibilidad del conocimiento. Esta conclusión coincide con lo planteado por Blanco-Benamburg (2021) sobre la importancia del razonamiento deductivo bien estructurado en la validación de conjeturas matemáticas.

No obstante, el hecho de que aún existan errores aritméticos y dificultades con la teoría de conjuntos indica que, incluso en niveles avanzados, la consolidación del conocimiento probabilístico requiere un enfoque continuo y reflexivo.

En ese sentido, los insumos generados en esta investigación ofrecen herramientas concretas para la apropiación del objeto probabilidad y pueden ser empleados por docentes en el diseño de secuencias didácticas orientadas al pensamiento probabilístico escolar.

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579

https://revista.sciencevolution.com

Conclusiones

En conclusión, los resultados obtenidos permiten valorar positivamente la validez del modelo de aprendizaje implementado, el cual integró la teoría APOE, la DG y la *fuzzy logic* como marco para el diseño, desarrollo y evaluación de las actividades. La clasificación de los estudiantes en los niveles Intra (27.3 %), Inter (45.4 %) y Trans (27.3 %), así como la caracterización detallada de sus desempeños en los subesquemas de probabilidad, evidencian que el modelo propuesto no solo facilita la evaluación más precisa del desarrollo cognitivo, sino que también promueve avances significativos en la comprensión del objeto matemático *probabilidad*. De este modo, se confirma la pertinencia del enfoque adoptado para fortalecer el pensamiento probabilístico escolar desde una perspectiva didáctica estructurada y evaluativa innovadora. Asimismo, el uso de la métrica *fuzzy* permitió una valoración más matizada y flexible del progreso de los estudiantes, reconociendo diferencias graduales en sus niveles de comprensión.

A partir de los hallazgos, se destaca la importancia de diseñar propuestas pedagógicas que integren contextos reales, recursos visuales, TIC y estrategias de reflexión verbal. En contextos similares, estas acciones podrían favorecer la superación de concepciones erróneas, estimular un pensamiento probabilístico más profundo y facilitar la transición hacia construcciones mentales más abstractas. Así, se contribuye no solo al aprendizaje del contenido matemático, sino también a la formación de una ciudadanía más crítica y analítica frente a la incertidumbre del entorno.

Referencias

Arnesen, K. K., & Skartsæterhagen, Ø. I. (2025). Mathematical induction in education research: A systematic review. *Educational Studies in Mathematics*, *119*, 79–100. https://doi.org/10.1007/s10649-024-10373-x

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (2026). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp. 1–34). American Mathematical Society. https://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf

Blanco-Benamburg, R., Palma-Picado, K., & Moreira-Mora, T. E. (2021). Estrategias cognitivas ejecutadas en la resolución de problemas matemáticos en una prueba de admisión a la educación superior. *Educación Matemática*, *33*(1), 240–267. https://www.redalyc.org/journal/405/40576157010/40576157010.pdf

Borji, V., Sánchez, A., Font, V. y Garcés, W. (2021). Un estudio sobre la comprensión de los estudiantes de la derivación implícita, basado en APOE y EOS. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 173– 180). Valencia: SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/24/ActasXXIVSEIEM.pdf

Castellanos Contrera, J. U., Pareja Figueredo, C. F., & Gutierrez Martinez, L. C. (2020). Modelo basado en lógica difusa para la construcción de condiciones de alta calidad en el sistema educativo. *CITAS*, 6(1) 1-7. https://doi.org/10.15332/24224529.6360

Escobar Pérez, S. E., Flores Andino, V. M., & Pérez Insuasti, J. J. (2024). Uso de la teoría APOE para el aprendizaje y comprensión de las matemáticas. *Polo del Conocimiento*, *9*(9), 3557–3575. https://doi.org/10.23857/pc.v9i9.8342

Fernández Coronado, N. A., & García-García, J. I. (2024). Sentido probabilístico: Un primer acercamiento. En M. Sánchez Aguilar, M. del S. García González, & A. Castañeda (Eds.), *Perspectivas actuales de la educación matemática* (pp. 107–116). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-10

García-García, J. I., Fernández Coronado, N. A., & Imilpán Rivera, I. A. (2020). Desarrollo del razonamiento probabilístico en profesores de matemáticas mediante simulación computacional. *Revista Paradigma*, *41* (2), 404–426. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p404-426.id917

George, A., & Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, *64*(3), 395–399. https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90162-7

Huerta, M. P. (2020). Hipótesis y conjeturas en el desarrollo del pensamiento estocástico: Retos para su enseñanza y en la formación de profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *23*(1), 79–102. https://doi.org/10.12802/relime.20.2313

sciencevolution
ISSN: 2810-8728 (En línea)
4.2
ABRIL - JUNIO
2025
Artículo Científico
81 - 95

Andrey Esneider Escobar Oquendo
ORCID: 0000-0001-5860-1579
Enrique Zagalo Suárez Aguilar
ORCID: 0000-0002-1692-2240

Iguarán Jiménez, A., Cabas-Manjarrés, M., Paba Barbosa, C., & Diazgranados Rincones, P. (2023). Relación de la prueba Saber 11, examen de admisión, promedio académico, prueba Saber Pro de estudiantes del programa de psicología de la Universidad del Magdalena. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, *17*(2), e1421. https://doi.org/10.19083/ridu.2023.1421

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). (2021). *Informe de gestión 2021*. https://www.icfes.gov.co/wp-content/uploads/2024/12/Informe-de-Gestion-2021-1.pdf

Joachin-Arizmendi, I., Locia-Espinoza, E., Morales-Carballo, A., & Reyna-Hernández, G. (2024). Diagnostic study of mathematical reasoning in novice university students. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *19*(3), em0788. https://doi.org/10.29333/iejme/14862

Muñoz Cuchca, E., & Solís Trujillo, B. P. (2021). Enfoque cualitativo y cuantitativo de la evaluación formativa. *ReHuSo: Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales*, *6*(3), 1–13. https://doi.org/10.5281/zenodo.5512590

Piaget, J. (1970). La epistemología genética. Buenos Aires: Paidós.

Popescu, V. F., & Pistol, M. S. (2021). Fuzzy logic expert system for evaluating the activity of university teachers. *International Journal of Assessment Tools in Education*, *8*(4), 991–1008. https://doi.org/10.21449/ijate.1025690

Quinio, K. A., & Cuarto, P. M. (2023). Mathematical Popescuisconceptions of senior high school students: Implications to mathematics curriculum. *JPAIR Institutional Research*, *21*(1), 44–66. https://doi.org/10.7719/872

Su, C.-S., & Marchant, C. (2021).The statistical reasoning level of chilean students of pedagogy in mathematics on statistical hypotheses tests. *Acta Scientiae Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *23*(6), 209–236. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5772

Syamsuri, S., & Santosa, C. A. (2021). Thinking structure of students' understanding of probability concept in terms of APOS theory. *MaPan: Jurnal Matematika dan Pembelajaran*, *9*(1), 119–135. https://doi.org/10.24252/mapan.2021v9n1a8

Vergara Gómez, A., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *23*(1): 7 - 36. https://doi.org/10.12802/relime.20.2311